**Транспортная задача**.  
Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2 | 7 |
| A2 | 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 7 + 13 + 20 = 40  
∑b = 10 + 10 + 5 + 8 + 7 = 40  
Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.  
Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2 | 7 |
| A2 | 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.  
1. Используя *метод северо-западного угла*, построим первый опорный план транспортной задачи.  
План начинается заполняться с верхнего левого угла.  
Искомый элемент равен c11=4. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 10. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x11 = min(7,10) = 7.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **4** | x | x | x | x | **7 - 7 = 0** |
| 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 13 |
| 3 | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| **10 - 7 = 3** | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Искомый элемент равен c21=5. Для этого элемента запасы равны 13, потребности 3. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.  
x21 = min(13,3) = 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | x | x | x | x | 0 |
| **5** | 3 | 4 | 6 | 4 | **13 - 3 = 10** |
| x | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| **3 - 3 = 0** | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Искомый элемент равен c22=3. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 10. Поскольку минимальным является 10, то вычитаем его.  
x22 = min(10,10) = 10.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | x | x | x | x | 0 |
| 5 | **3** | x | x | x | **10 - 10 = 0** |
| x | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| 0 | **10 - 10 = 0** | 5 | 8 | 7 |  |

Искомый элемент равен c33=5. Для этого элемента запасы равны 20, потребности 5. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.  
x33 = min(20,5) = 5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | x | x | x | x | 0 |
| 5 | 3 | x | x | x | 0 |
| x | 2 | **5** | 7 | 5 | **20 - 5 = 15** |
| 0 | 0 | **5 - 5 = 0** | 8 | 7 |  |

Искомый элемент равен c34=7. Для этого элемента запасы равны 15, потребности 8. Поскольку минимальным является 8, то вычитаем его.  
x34 = min(15,8) = 8.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | x | x | x | x | 0 |
| 5 | 3 | x | x | x | 0 |
| x | 2 | 5 | **7** | 5 | **15 - 8 = 7** |
| 0 | 0 | 0 | **8 - 8 = 0** | 7 |  |

Искомый элемент равен c35=5. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 7. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x35 = min(7,7) = 7.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | x | x | x | x | 0 |
| 5 | 3 | x | x | x | 0 |
| x | 2 | 5 | 7 | **5** | **7 - 7 = 0** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **7 - 7 = 0** |  |

Далее, согласно алгоритму, ищем элементы среди не вычеркнутых.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 6 | 8 | 3 | 2 | 7 |
| 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 13 |
| 3 | 2 | 5 | 7 | 5 | 20 |
| 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Искомый элемент равен c12=6, но т.к. ограничения выполнены, то x12=0.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4[7] | 6[0] | 8 | 3 | 2 | 7 |
| A2 | 5[3] | 3[10] | 4 | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3 | 2 | 5[5] | 7[8] | 5[7] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 4\*7 + 5\*3 + 3\*10 + 5\*5 + 7\*8 + 5\*7 = 189  
**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 4; 0 + v1 = 4; v1 = 4  
u2 + v1 = 5; 4 + u2 = 5; u2 = 1  
u2 + v2 = 3; 1 + v2 = 3; v2 = 2  
На данном этапе возникла ситуация, когда для оставшихся занятых клеток не известно ни одного из потенциалов. Это результат вырожденности решения. Для его преодоления в одну из клеток нужно внести нулевую поставку, таким образом, такая клетка станет условно занятой.  
Для неизвестного потенциала u3 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(3;1), v1=4  
(3;2), v2=2  
Для неизвестного потенциала v3 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(1;3), u1=0  
(2;3), u2=1  
Для неизвестного потенциала v4 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(1;4), u1=0  
(2;4), u2=1  
Для неизвестного потенциала v5 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(1;5), u1=0  
(2;5), u2=1  
Среди этих клеток, в которых может быть размещена нулевая поставка, наименьший тариф имеет клетка (1, 5) с c15 = 2. Следовательно, нулевую поставку размещаем в клетку (1, 5), и она становится условно занятой.  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
Ранее поставленный псевдоноль из ячейки (1;2) убираем.  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v3 = 5; 3 + v3 = 5; v3 = 2  
u3 + v4 = 7; 3 + v4 = 7; v4 = 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=4 | v2=2 | v3=2 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 4[7] | 6 | 8 | 3 | 2[0] |
| u2=1 | 5[3] | 3[10] | 4 | 6 | 4 |
| u3=3 | 3 | 2 | 5[5] | 7[8] | 5[7] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 4 > 3; ∆14 = 0 + 4 - 3 = 1 > 0  
(3;1): 3 + 4 > 3; ∆31 = 3 + 4 - 3 = 4 > 0  
(3;2): 3 + 2 > 2; ∆32 = 3 + 2 - 2 = 3 > 0  
max(1,4,3) = 4  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 3  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4[7][-] | 6 | 8 | 3 | 2[0][+] | 7 |
| 2 | 5[3] | 3[10] | 4 | 6 | 4 | 13 |
| 3 | 3[+] | 2 | 5[5] | 7[8] | 5[7][-] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,5 → 1,5 → 1,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 1) = 7. Прибавляем 7 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 7 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| A2 | 5[3] | 3[10] | 4 | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3[7] | 2 | 5[5] | 7[8] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u2 + v1 = 5; 0 + u2 = 5; u2 = 5  
u2 + v2 = 3; 5 + v2 = 3; v2 = -2  
u3 + v3 = 5; 3 + v3 = 5; v3 = 2  
u3 + v4 = 7; 3 + v4 = 7; v4 = 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=-2 | v3=2 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] |
| u2=5 | 5[3] | 3[10] | 4 | 6 | 4 |
| u3=3 | 3[7] | 2 | 5[5] | 7[8] | 5[0] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 4 > 3; ∆14 = 0 + 4 - 3 = 1 > 0  
(2;3): 5 + 2 > 4; ∆23 = 5 + 2 - 4 = 3 > 0  
(2;4): 5 + 4 > 6; ∆24 = 5 + 4 - 6 = 3 > 0  
(2;5): 5 + 2 > 4; ∆25 = 5 + 2 - 4 = 3 > 0  
max(1,3,3,3) = 3  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;3): 4  
Для этого в перспективную клетку (2;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| 2 | 5[3][-] | 3[10] | 4[+] | 6 | 4 | 13 |
| 3 | 3[7][+] | 2 | 5[5][-] | 7[8] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (2,3 → 2,1 → 3,1 → 3,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 1) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| A2 | 5 | 3[10] | 4[3] | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3[10] | 2 | 5[2] | 7[8] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u3 + v3 = 5; 3 + v3 = 5; v3 = 2  
u2 + v3 = 4; 2 + u2 = 4; u2 = 2  
u2 + v2 = 3; 2 + v2 = 3; v2 = 1  
u3 + v4 = 7; 3 + v4 = 7; v4 = 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=1 | v3=2 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] |
| u2=2 | 5 | 3[10] | 4[3] | 6 | 4 |
| u3=3 | 3[10] | 2 | 5[2] | 7[8] | 5[0] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 4 > 3; ∆14 = 0 + 4 - 3 = 1 > 0  
(3;2): 3 + 1 > 2; ∆32 = 3 + 1 - 2 = 2 > 0  
max(1,2) = 2  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;2): 2  
Для этого в перспективную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| 2 | 5 | 3[10][-] | 4[3][+] | 6 | 4 | 13 |
| 3 | 3[10] | 2[+] | 5[2][-] | 7[8] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (3,2 → 3,3 → 2,3 → 2,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 3) = 2. Прибавляем 2 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 2 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| A2 | 5 | 3[8] | 4[5] | 6 | 4 | 13 |
| A3 | 3[10] | 2[2] | 5 | 7[8] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u3 + v2 = 2; 3 + v2 = 2; v2 = -1  
u2 + v2 = 3; -1 + u2 = 3; u2 = 4  
u2 + v3 = 4; 4 + v3 = 4; v3 = 0  
u3 + v4 = 7; 3 + v4 = 7; v4 = 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=-1 | v3=0 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] |
| u2=4 | 5 | 3[8] | 4[5] | 6 | 4 |
| u3=3 | 3[10] | 2[2] | 5 | 7[8] | 5[0] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 4 > 3; ∆14 = 0 + 4 - 3 = 1 > 0  
(2;4): 4 + 4 > 6; ∆24 = 4 + 4 - 6 = 2 > 0  
(2;5): 4 + 2 > 4; ∆25 = 4 + 2 - 4 = 2 > 0  
max(1,2,2) = 2  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;4): 6  
Для этого в перспективную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| 2 | 5 | 3[8][-] | 4[5] | 6[+] | 4 | 13 |
| 3 | 3[10] | 2[2][+] | 5 | 7[8][-] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (2,4 → 2,2 → 3,2 → 3,4).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 2) = 8. Прибавляем 8 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 8 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] | 7 |
| A2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8] | 4 | 13 |
| A3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7[0] | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u3 + v2 = 2; 3 + v2 = 2; v2 = -1  
u3 + v4 = 7; 3 + v4 = 7; v4 = 4  
u2 + v4 = 6; 4 + u2 = 6; u2 = 2  
u2 + v3 = 4; 2 + v3 = 4; v3 = 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=-1 | v3=2 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2[7] |
| u2=2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8] | 4 |
| u3=3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7[0] | 5[0] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 4 > 3; ∆14 = 0 + 4 - 3 = 1 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;4): 3  
Для этого в перспективную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 3[+] | 2[7][-] | 7 |
| 2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8] | 4 | 13 |
| 3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7[0][-] | 5[0][+] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (1,4 → 1,5 → 3,5 → 3,4).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 4) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3[0] | 2[7] | 7 |
| A2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8] | 4 | 13 |
| A3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7 | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3  
u2 + v4 = 6; 3 + u2 = 6; u2 = 3  
u2 + v3 = 4; 3 + v3 = 4; v3 = 1  
u1 + v5 = 2; 0 + v5 = 2; v5 = 2  
u3 + v5 = 5; 2 + u3 = 5; u3 = 3  
u3 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u3 + v2 = 2; 3 + v2 = 2; v2 = -1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=-1 | v3=1 | v4=3 | v5=2 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3[0] | 2[7] |
| u2=3 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8] | 4 |
| u3=3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7 | 5[0] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;5): 3 + 2 > 4; ∆25 = 3 + 2 - 4 = 1 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;5): 4  
Для этого в перспективную клетку (2;5) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 3[0][+] | 2[7][-] | 7 |
| 2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[8][-] | 4[+] | 13 |
| 3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7 | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Цикл приведен в таблице (2,5 → 2,4 → 1,4 → 1,5).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 5) = 7. Прибавляем 7 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 7 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 4 | 6 | 8 | 3[7] | 2 | 7 |
| A2 | 5 | 3 | 4[5] | 6[1] | 4[7] | 13 |
| A3 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7 | 5[0] | 20 |
| Потребности | 10 | 10 | 5 | 8 | 7 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3  
u2 + v4 = 6; 3 + u2 = 6; u2 = 3  
u2 + v3 = 4; 3 + v3 = 4; v3 = 1  
u2 + v5 = 4; 3 + v5 = 4; v5 = 1  
u3 + v5 = 5; 1 + u3 = 5; u3 = 4  
u3 + v1 = 3; 4 + v1 = 3; v1 = -1  
u3 + v2 = 2; 4 + v2 = 2; v2 = -2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=-1 | v2=-2 | v3=1 | v4=3 | v5=1 |
| u1=0 | 4 | 6 | 8 | 3[7] | 2 |
| u2=3 | 5 | 3 | 4[5] | 6[1] | 4[7] |
| u3=4 | 3[10] | 2[10] | 5 | 7 | 5[0] |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 3\*7 + 4\*5 + 6\*1 + 4\*7 + 3\*10 + 2\*10 = 125  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо весь груз направить к 4-у потребителю.  
Из 2-го склада необходимо груз направить к 3-у потребителю (5 ед.), к 4-у потребителю (1 ед.), к 5-у потребителю (7 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить к 1-у потребителю (10 ед.), к 2-у потребителю (10 ед.)  
Задача имеет множество оптимальных планов, поскольку оценка для (3;5) равна 0.